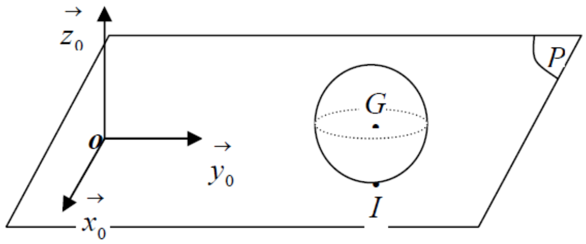
2 exercices supplémentaires avec correction en cinématique des solides indéformables

<u>Exercice 1 avec correction :</u>

Une sphère ***(S)*** pleine et homogène, de centre ***G,*** de rayon a, roule de manière quelconque sur un plan fixe horizontal (P). Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe lié au plan tel que $\vec{z}_0 \perp (P)$. Soit $R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ un repère orthonormé direct, lié à la sphère tel que : $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$. L'orientation du repère R_S par rapport à R_0 se fait par les angles d'Euler classiques ψ,θ,φ. On prendra R_0 comme repère de projection.

1. Etablir les figures planes de rotation de la sphère ;
2. Donner l'expression du vecteur rotation instantané de la sphère ;
3. Déterminer la vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe.
4. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.



Solution :

(S) : est une sphère homogène de rayon ***a*** ; ***(P) :*** un plan fixe ; $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ; $(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \in (P)$ et $\vec{z}_0 \perp (P)$

$R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$: repère lié à la sphère.

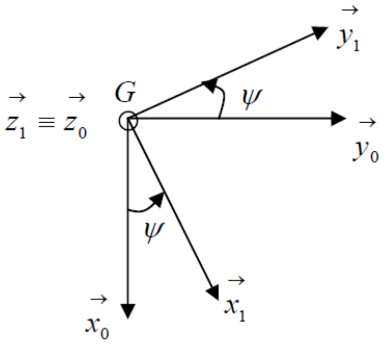
Le passage du repère R_S vers le repère R_0 se fait par trois rotations utilisant les angles d'Euler (ψ,θ,φ) et deux repères intermédiaires R_1 et R_2

1. Les figures planes :

a) *Passage du repère* R_1 *vers* R_0 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

Matrice de passage du repère R_1 vers R_0

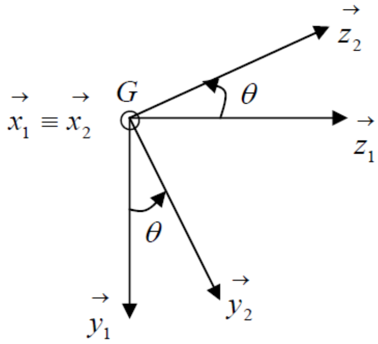
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_0}} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$



b) *Passage du repère* R_2 *vers* R_1 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$

Matrice de passage de R_2 vers R_1

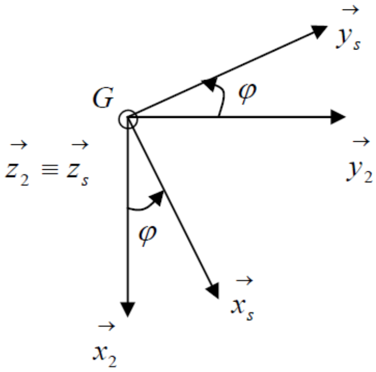
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_2 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$



c) *Passage du repère* R_s *vers* R_2 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_s$

Matrice de passage de R_s vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_s \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur rotation instantané de la sphère dans le repère R_0

$$\vec{\Omega}_s^0 = \vec{\Omega}_s^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$

Exprimons $\vec{x}_1$ *et* $\vec{z}_0$ dans le repère R_0. D'après les matrices de passage nous avons :

$$\vec{x}_1 = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{z}_2 = -\sin\theta\,\vec{y}_1 + \cos\theta\,\vec{z}_1 = -\sin\theta\left(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0\right) + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_2 = \sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

ce qui donne : $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0\right) + \dot{\theta}\left(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0\right) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\vec{x}_0 + \left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{y}_0 + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{array}\right.}$$

3. Vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe

Les points G et I appartiennent à la sphère. Par la cinématique du solide, nous pouvons connaître la vitesse du point I à partir de celle de G, en effet nous avons : $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{GI}$

Avec : $\overrightarrow{OG} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ a \end{array}\right.} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{array}\right.}$

et $\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ 0 \end{array}\right.} \Rightarrow \overrightarrow{GI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -a \end{array}\right.}$

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -a \end{cases}$$

, on obtient finalement :

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

4. Condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite il faut que la vitesse du point I soit

nulle : $\vec{V}^0(I) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}_{R_0}$

On multiplie l'équation *(1)* par $\sin\psi$ et l'équation *(2)* par $\cos\psi$ puis on fait la différence des deux

équations : $\begin{cases} \dot{x}\sin\psi - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\sin\psi + \dot{\theta}\sin^2\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y}\cos\psi + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\cos\psi + \dot{\theta}\cos^2\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta} = 0$

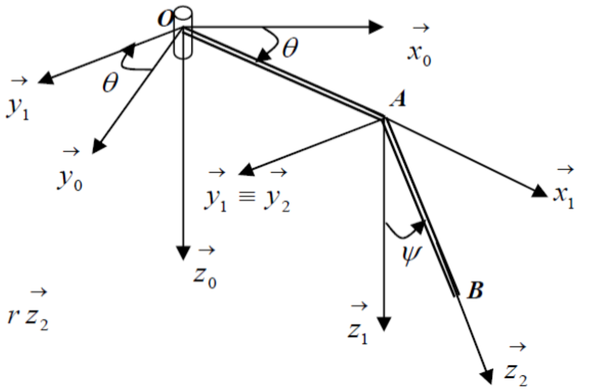
comme nous avons aussi : $\sin\psi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\cos\psi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

L'équation devient : $\dfrac{\dot{y}x - \dot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a\dot{\theta} = 0$

Exercice 2 avec correction :

Soient deux barres articulées en ***A*** faisant partie d'un mécanisme de régulation. La barre ***OA*** est en rotation autour de l'axe $\vec{z}_0$ dans le plan horizontal $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. La barre ***AB*** est en rotation autour de l'axe $\vec{y}_1$ dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{z}_0)$. Soit ***P*** un point mobile sur la barre ***AB*** tel que. $\overrightarrow{AP} = r\,\vec{z}_2$, $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{z}_2$; (***a*** et ***b*** sont des constantes). R_1 : repère de projection. Déterminer :

1. Les matrices de passage de R_0 vers R_1 et de R_2 vers R_1 ;
2. $\vec{\Omega}_2^0$, $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation direct et par la cinématique du solide ;



Solution

$\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{z}_2$ et $\overrightarrow{AP} = r\,\vec{z}_2$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

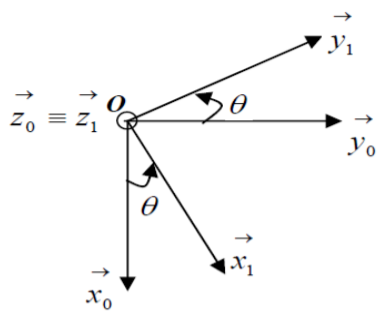
$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation tel que $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation tel que $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$ et $\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, $\vec{\Omega}_2^1 \equiv \dot{\psi}\,\vec{y}_1$

1. Matrices de passage

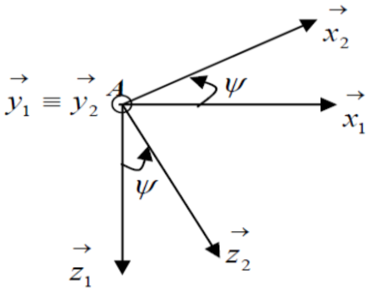
Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_0 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$



Matrice de passage de R_2 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}}_{P_{R_2 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$



2. $\vec{\Omega}_2^0$ puis $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation direct et par la cinématique du solide

a) *la vitesse instantanée de rotation* $\vec{\Omega}_2^0$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{y}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1}$$

b) $\vec{V}^0(B)$ ***par dérivation direct et par la cinématique du solide***

****) par dérivation directe***

Nous avons : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ b \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} a + b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1}$

Par dérivation nous avons : $\vec{V}^0(B) = \dfrac{d^0\,\vec{OB}}{dt} = \dfrac{d^1\,\vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OB}$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a + b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a + b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

****) par la cinématique du solide***

Nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}$

Nous avons : $\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{V}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

Car $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$ Nous avons ainsi :

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a + b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

b) $\vec{\gamma}^0(B)$ ***par dérivation et par la cinématique du solide***

****) par dérivation***

Par dérivation nous avons : $\vec{\gamma}^0(B) = \dfrac{d^0\,\vec{V}^0(B)}{dt} = \dfrac{d^1\,\vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(B)$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi \\ (a + b\sin\psi)\ddot{\theta} + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a + b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^{2}\sin\psi - (a + b\sin\psi)\dot{\theta}^{2} \\ (a + b\sin\psi)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^{2}\cos\psi \end{array}\right.}$$

***) par la cinématique du solide**

Nous pouvons écrire :

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \vec{\gamma}^{0}(A) + \frac{d^{0}\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}\right)$$

Calculons d'abord : $\vec{\gamma}^{0}(A) = \vec{\gamma}^{0}(O) + \frac{d^{0}\vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}\right)$

Sachant que $\vec{\gamma}^{0}(O) = \vec{0}$, on obtient :

$$\vec{\gamma}^{0}(A) = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.} + \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.} = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} -a\dot{\theta}^{2} \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{array}\right.}$$

$$\frac{d^{0}\vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^{1}\vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{array}\right.} + \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{array}\right.}$$

$$\frac{d^{0}\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{array}\right.} = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\ddot{\psi}\cos\psi \\ b\ddot{\theta}\sin\psi + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\cos\psi \end{array}\right.}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}\right) = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{array}\right.} = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{array}\right.} \wedge \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\dot{\psi}\cos\psi \\ b\dot{\theta}\sin\psi \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{array}\right.}$$

$$= \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} -b\dot{\psi}^{2}\sin\psi - b\dot{\theta}^{2}\sin\psi \\ b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\dot{\psi}^{2}\cos\psi \end{array}\right.}$$

En faisant la somme des trois termes nous obtenons :

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} -a\dot{\theta}^{2} \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{array}\right.} + \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\ddot{\psi}\cos\psi \\ b\ddot{\theta}\sin\psi + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\cos\psi \end{array}\right.} + \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} -b\dot{\psi}^{2}\sin\psi - b\dot{\theta}^{2}\sin\psi \\ b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\dot{\psi}^{2}\cos\psi \end{array}\right.}$$

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^{2}\sin\psi - (a + b\sin\psi)\dot{\theta}^{2} \\ (a + b\sin\psi)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^{2}\cos\psi \end{array}\right.}$$